УДК (519.9+518.5): 532.54

Н.И. Карасев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УЗЛОВЫХ НАПОРОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ТЕПЛОСНАБЖАЮЩИХ СИСТЕМАХ МЕГАПОЛИСОВ

Метод узловых давлений (МД), развитый в теории гидравлических цепей [1], обобщает метод узловых потенциалов из теории электрических цепей, сочетая преобразования Максвелла к узловым напорам с методом Ньютона, и базируется на процедуре линеаризации системы уравнений материального баланса в узлах с замыкающими соотношениями, описывающими стационарное изотермическое течение жидкости на пассивных и активных ветвях гидравлических цепей теплоснабжающих систем(ТСС). На основе исследований, выполненных в [1], сделан вывод о большем быстродействии и лучшей сходимости метода контурных расходов(МКР) по сравнению с МД, что на многие годы исключило попытки привлечения МД для конструирования автоматизированных решателей задач потокораспределения для информационных технологий, обеспечивающих разработку теплогидравлических режимов ТСС.

Однако, в задачах машинного анализа сложных электрических цепей метод узловых потенциалов получил преимущественное развитие из-за большей вычислительной эффективности. Именно это обстоятельство побудило нас обратится к другому подходу к формированию системы уравнений узловых напоров для сложных гидравлических цепей, который опирается на инверсные характеристики пассивных и активных элементов трубопроводных сетей, замыкающих системы уравнений стационарного изотермического режима ТСС. Вычислительная эффективность этого подхода, как показали последующие исследования его программной реализации на реальных гидравлических цепях большой размерности[2], на много превосходят показатели эффективности метода МД, описанного в [1].

Модель стационарного гидравлического режима большой теплоснабжающей системы (ТСС) может быть выражена следующей нелинейной системой уравнений, записанной относительно узловых напоров, исходя из закона о материальном балансе в линейно-независимых узлах гидравлической цепи

$$f_j(h_1,h_2,....,h_{m-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} q_i (\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k) - Q_j = 0, \forall j = \overline{1,m-1} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j = 0,$$

где h_i, q_i, Q_j - соответственно, напор в i-ом узле, расход на i-ом участке, узловой расход в j-ом узле; a_{ji}, n, m - соответственно, элемент матрицы соединений, число участков и узлов в гидравлической цепи.

$$q_i(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k) = \begin{cases} R_{0i} + R_{1i}(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k) + R_{2i}(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k)^2, \forall i = \overline{1,n_1} \\ Sgn(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k) \left[\left| \mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k \right| / r_i \right]^{1/\alpha i}, \forall i = \overline{n_1+1,n} \end{cases}, \qquad (2)$$

где $R_{0i}, R_{1i}, R_{2i}, n_1, r_i, \mu_i$ - соответственно, параметры энергетической характеристики i-го насосного агрегата, число насосных агрегатов, гидравлическое сопротивление i-го участка и признак принадлежности участка к активной либо пассивной ветви цепи.

Если предположить существование решения $h^* = (h_1^*, h_2^*, ..., h_{m-1}^*)$ векторного уравнения узловых напоров $f(h) = 0$ и заменить в нём $h^* = h^0 + \delta h$, где $h^0 = (h_1^0, h_2^0, ..., h_{m-1}^0)$ - некоторое начальное приближение к решению h^*, то после разложения векторного уравнения $f(h^0 + \delta h) = 0$ в двучленный ряд Тейлора по степеням малых приращений напоров в узлах δh получим векторное уравнение

$$f(h^0 + \delta h) = f(h^0) + f'(h^0)\delta h + O(\delta h^0), \qquad (3)$$

покоординатная запись которого приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно малых приращений напоров в линейно-независимых узлах

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1(h^0)}{\partial h_1}\delta h_1 + \frac{\partial f_1(h^0)}{\partial h_2}\delta h_2 + ... + \frac{\partial f_1(h^0)}{\partial h_{m-1}}\partial h_{m-1} = -f_1(h^0) \\ \frac{\partial f_2(h^0)}{\partial h_1}\delta h_1 + \frac{\partial f_2(h^0)}{\partial h_2}\delta h_2 + ... + \frac{\partial f_2(h^0)}{\partial h_{m-1}}\partial h_{m-1} = -f_2(h^0) \\ .... \\ \frac{\partial f_{m-1}(h^0)}{\partial h_1}\delta h_1 + \frac{\partial f_{m-1}(h^0)}{\partial h_2}\delta h_2 + ... + \frac{\partial f_{m-1}(h^0)}{\partial h_{m-1}}\delta h_{m-1} = -f_{m-1}(h^0) \end{cases}, \qquad (4)$$

где коэффициенты $\frac{\partial f_i(h^0)}{\partial h_j}(i, j = \overline{1, m-1})$ при δh_i есть элементы матрицы Якоби для нелинейной вектор-функции f(h) , вычисляемые в точке h^0.

Решая линейную систему (4) относительно приращений или поправок $\delta h_j, \forall_j = \overline{1, m-1}$, получим лишь их приближённые значения δh_j^0, с помощью которых можно улучшить исходные значения всех напоров в узлах. Приведенные рассуждения привели к известному итерационному методу Ньютона в данном случае для системы нелинейных уравнений узловых напоров. Элементы Якобиана для линеаризованной системы уравнений узловых напоров могут быть выражены посредством следующих соотношений

$$\frac{\partial f_j(h^l)}{\partial h_t} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} q_i^{`}(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l) a_{it}^{\mathrm{T}} \mu_i, j,t = \overline{1,m-1} \qquad (5)$$

$$q_i^{`}(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l) = \frac{1}{r_i \alpha_i} Sgn(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l) Sgn(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l)(\left|\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l\right| / r_i)^{\frac{1}{\alpha i}-1} =$$
$$\frac{1}{r_i \alpha_i}(\left|\mu_i \sum_{k-1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l\right| / r_i)^{\frac{1}{\alpha i}-1}, \forall i = \overline{n_1+1,n} \qquad (6)$$

$$q_i^{`}(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l) = Sgn(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l)(R_{1i} + 2R_{2i}(\mu_i \sum_{k=1}^{m} a_{ik}^{\mathrm{T}} h_k^l)), \forall i = \overline{1,n_1} \qquad (7)$$

Введем векторно-матричные обозначения для линеаризованной системы узловых напоров и получим компактные соотношения для диагональных и недиагональных элементов Якобиана

$$D\delta H = F, \qquad (8)$$

где $\delta H = \left[\delta h_1, \delta h_2, ..., \delta h_{m-1}\right]^{\mathrm{T}}$ - вектор поправок узловых напоров;

$F = \left[-f_1(h^l), -f_2(h^l), ..., -f_{m-1}(h^l)\right]^{\mathrm{T}}$ - вектор правых частей ;

$D = \left\{d_{jt}\right\}_{(m-1)\times(m-1)}, d_{jt} = \dfrac{\partial f_j(h^l)}{\partial h_t}, j,t = \overline{1,m-1}.$ - Якобиан вектор-функции узловых напоров.

Для пассивных элементов диагональный элемент Якобиана вычисляется из следующего соотношения

$$d_{jj} = \sum_{i=1}^{nj} \frac{1}{\alpha_i} \left| \Delta h_i^l \right|^{(\frac{1}{\alpha i}-1)} r_i^{-\frac{1}{\alpha i}} \quad ,$$

а для активных ветвей $d_{jj} = -\sum_{i=1}^{nj} \left[R_{1i} + 2R_{2i} \Delta h_i^l \right].$

В самом общем случае диагональные элементы определяются следующим образом

$$d_{jj} = \sum_{i=1}^{nj1} \frac{1}{\alpha_i} \left| \Delta h_i^l \right|^{(\frac{1}{\alpha i}-1)} r^{-\frac{1}{\alpha i}} - \sum_{i=1}^{nj2} \left[R_{1i} + 2R_{2i} \Delta h_i^l \right], \forall j = \overline{1,m-1} \quad (9)$$

Как известно, режимы движения энергоносителя в реальных тепловых сетях характеризуются квадратичным законом потерь, а поэтому $\alpha_i = 2, \forall i = \overline{1,n}$ и

$$d_{jj} = \sum_{i=1}^{nj1} \frac{1}{2\sqrt{\left| \Delta h_i^l \right| \bullet r_i}} - \sum_{i=1}^{nj2} \left[R_{1i} + 2R_{2i} (\Delta h_i^l) \right] \quad (10)$$

Недиагональные элементы матрицы D могут получать числовые значения из следующих соотношений. Если узлы j и t связаны i-ым пассивным элементом , то

$$d_{jt} = \frac{\partial f_j(h)}{\partial h_t} = -\frac{1}{\alpha_i} \left| \Delta h_i^l \right|^{(\frac{1}{\alpha i}-1)} \bullet r_i^{-\frac{1}{\alpha i}}, \forall i = \overline{n1+1,n}, j,t = \overline{1,m-1}, j \neq t$$

Для тепловых сетей $\alpha_i = 2$ для $\forall i = \overline{n1+1,n}$, а поэтому

$$d_{jt} = \frac{\partial f_j(h)}{\partial h_t} = -\frac{1}{2\sqrt{\left| \Delta h_i \right| \bullet r_i}}, j,t = \overline{1,m-1}, j \neq t, i = \overline{n_1+1,n} \quad (11)$$

Если узлы j и t связаны активным i-ым элементом, то

$$d_{jt} = \frac{\partial f_j(h)}{\partial h_t} = R_{1i} + 2R_{2i}(\Delta h_i), j,t = \overline{1,m-1}; j \neq t; i = \overline{1,n} \tag{12}$$

Следующие свойства матрицы коэффициентов D в линеаризованной системе уравнений узловых напоров позволяют выбрать эффективные методы решения большеразмерных линейных систем:

- Матрица D является симметрической, так как для неё справедливы отношения $\frac{\partial f_j(h)}{\partial h_t} = \frac{\partial f_t(h)}{\partial h_j}$, или $d_{jt} = d_{tj}$. Настоящее свойство объективно обеспечено топологией технологической структуры теплоснабжающих систем, в которых каждая ветвь соединена парой узлов, а поэтому при табличном представлении структуры сети тождественность элементов, симметрично расположенных относительно главной диагонали, неизбежна;
- Для всех узлов трубопроводной сети, непосредственно не связанных с опорным узлом, обеспечено строгое равенство диагональных элементов сумме (по модулю) остальных элементов в соответствующей строке матрицы D, как это следует из полученных соотношений (11)-(12);
- В реальных технологических схемах ТСС с одним независимым узлом могут быть связаны две-пять ветвей, а поэтому матрица D имеет много незаполненных элементов, т.е. относится к классу слабо заполненных матриц, а линеаризованная система $D\delta H = F$ - к классу

больших разреженных систем уравнений. Для ТСС любой технологической схемы заполненность матрицы D является своеобразной *структурной константой*, так как зависит только от числа узлов, ветвей и их соединений. Свойство слабой заполненности матрицы D определяет необходимость применения специальных методов нахождения корней линеаризованной системы $D\delta H = F$, исключающих операции с нулевыми элементами;

- Система линеаризованных уравнений узловых напоров $D\delta H = F$ хорошо обусловлена, так как приведенные выше свойства матрицы D для реальных сетей с физически правдоподобными значениями параметров элементов обеспечивают выполнимость условия существования и единственности решения $\det D \neq 0$.

Однако, тщательные исследования алгоритмов прямых методов на базе Гаусовских исключений с эффективными процедурами учета заполненности матрицы коэффициентов сделали эти методы более предпочтительными по сравнению с итеративными [3-4]. В этой связи однозначно решается вопрос выбора численного метода для решения большеразмерной системы линеаризованных уравнений узловых напоров - это эффективные алгоритмы метода исключения Гаусса с эффективными методами порядка исключения неизвестных. Реализация этих алгоритмов связана с использованием сложных схем хранения и доступа к данным в памяти реализующей вычислительной системы, а поэтому эффективность алгоритмов для разреженных матриц более чем в какой-либо другой области вычислений зависит от качества их машинной реализации.

Ньютоновский процесс сходится со скоростью квадратичной сходимости в малой окрестности корня $h^* + \delta h$ нелинейной системы уравнений узловых напоров (1) при условии $\det\left[\frac{\partial f(h)}{\partial h}\right] \neq 0$. Последнее условие есть ни что иное, как условие хорошей обусловленности линеаризованной системы уравнений узловых напоров, которое выполнимо всегда при соответствующем выборе начального приближения.

Достаточно эффективным критерием завершения итерационного процесса Ньютона для систем уравнений общего вида является условие $\left\| h^l - h^{l+1} \right\| \leq \varepsilon$. Действительно, вблизи корня ньютоновские итерации сходятся квадратично, а поэтому, если этот критерий выполнен, то

$\left\| h^{l+1} - h^* \right\| \approx \varepsilon^2 \pi \varepsilon$. Выбирая $\varepsilon \approx 10^{-5} - 10^{-6}$, можно получить решение с не менее чем десятком значащих цифр в среде машинной арифметики двойной точности. Однако, исходя из необходимости обеспечения равномерного приближения к решению по множеству узлов, достаточно эффективным условием выхода из ньютоновского итерационного процесса для систем нелинейных уравнений узловых напоров оказывается критерий

$$\left|\max_{j} f_j(h^l)\right| \le E_1, j=\overline{1,m-1}, l=0,1,2,.....,l,l+1 \qquad (13)$$

где E_1 - заданная допустимая максимальная невязка материального баланса по множеству линейно-независимых узлов моделируемой ТСС.

Удачное завершение Ньютоновского итерационного процесса приводит к решению задачи определения напоров в узлах ТСС, т.е. к нахождению значений всех компонентов векторов $(h^*, \Delta h^*, P^*)$.

Тогда решение задачи о потокораспределении на всех активных и пассивных ветвях ТСС сводится к вычислению компонентов вектора расходов с помощью следующих инверсных (расходно- напорных) характеристик

$$\begin{aligned} q^*{}_i &= Sgn(\Delta h^*{}_i)\sqrt{\left|\Delta h^*{}_i\right| / r_i}, \forall i=\overline{n_1+1,n} \\ q^*{}_i &= R_{0i} + R_{1i}\Delta h^*{}_i + R_{2i}(\Delta h^*{}_i)^2, \forall i=\overline{1,n_1} \end{aligned} \qquad (14)$$

Список литературы

1.Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей.М.: Наука, 1985, 277с.

2.Карасев Н.И., Фольгарт В.И. и др. Моделирование установившихся гидравлических режимов больших теплоснабжающих систем с дроссельным управлением.-Электронное моделирование, 1990,№1,с.72-76.

3.Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер.с англ.-М.: Радио и связь, 1988.-560 с.

4. Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разряженных систем уравнений : Пер. с англ.-М.:Мир, 1984.-333 с.